

Bayesianische Erkundungen mit Würfeln¹

ARTHUR BERG, OXFORD

¹ Original in Englisch: *Teaching Statistics* 43(3), 2021, S. 114–123. <https://doi.org/10.1111/test.12271>.
Übersetzung: MANFRED BOROVCNIK

Zusammenfassung: Das Thema der Bayesianischen Aktualisierung einer *a priori*-Verteilung wird anhand von regulären und verzerrten Würfeln als intuitives und motivierendes Modell untersucht. Details zur Berechnung von *a posteriori*-Wahrscheinlichkeiten für eine diskrete *a priori*-Verteilung werden erläutert und bieten eine andere Sichtweise zu *p*-Werten. Dieser Artikel enthält auch die Stern- und Balken-Zähltechnik, eine leistungsstarke Zählmethode, die für Lernende zugänglich ist, die bereits Permutationen und Kombinationen kennengelernt haben. Unterstützender R-Code und eine Shiny-Anwendung ermöglichen eine interaktive Erkundung der besprochenen Themen.

Schlagwörter: Unterricht, Bayes-Theorem, Goodness-of-Fit-Tests, Shiny, Sterne-und-Balken Technik

1 Einleitung

Ziel ist es, Bayesianisches Denken zu fördern und die Unterschiede zu nicht-Bayesianischen Ansätzen zu verstehen. Das Material ist am besten für Studierende geeignet, die bereits mit Permutationen und Kombinationen, statistischen Hypothesentests und *p*-Werten vertraut sind und das Bayes-Theorem kennen. Der Autor hat das diskrete Modell fürs Würfeln im Klassenzimmer benutzt, um Bayesianische Konzepte einzuführen und zu motivieren. Würfel bieten ein effektives Modell für den Unterricht in diskreter Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistischen Konzepten. Viele Artikel in *Teaching Statistics* erörtern Einsatzmöglichkeiten von Würfeln im Unterricht wie die Analyse von Spielen (Feldman und Morgan 2003; Foster und Martin 2016; McPherson 2015; Meyer 2019; Stephenson et al. 2009; Wang 1989; Wang 1993) und die Verwendung nicht-traditioneller Würfel in unterschiedlichen Aktivitäten (Dunn 2005; Gelman und Glickman 2000; Gelman und Nolan 2002; Jessop 2010).

Dieser Beitrag unterstützt grundlegende statistische Konzepte durch Erkundungen mit regulären und verzerrten (gewichteten) Würfeln. Beim Würfeln kann das Modell der Datenerzeugung leicht verständlich gemacht werden, so dass man sich auf die statistischen Kernkonzepte konzentrieren kann.

Zentrale Frage ist:

Wenn wir die Ergebnisse eines Würfelwurfs beobachten, was können wir über Fairness oder Verzerrtheit dieses Würfels sagen?

Im Folgenden erläutern wir Anwendungen des Bayes-Theorems, um diese Schlüsselfrage zu beantworten. Einige Lernende sind möglicherweise nicht vertraut mit Anwendungen des Bayes-Theorems auf statistische Inferenz. Dieser Artikel bietet eine gute Möglichkeit, sie behutsam in Bayesianische Konzepte einzuführen. Wir vergleichen auch den Bayesianischen Aktualisierungsansatz mit der Goodness-of-Fit-Statistik – eine Methode, mit der die Lernenden vielleicht schon vertraut sind, und geben so einen Einblick in die Unterschiede zwischen Bayesianischen und nicht-Bayesianischen Ansätzen, einschließlich der Probleme, die man betrachten kann, und den Annahmen, die für den jeweiligen Ansatz erforderlich sind.

Teaching Statistics hat auch eine reiche Tradition an Beiträgen, in denen Shiny-Anwendungen in unterschiedlichster Weise dazu dienen, statistische Konzepte zu veranschaulichen (Arnholt 2019; Freire 2019; Williams und Williams 2018). Dieser Beitrag wird von einer Anwendung (Chang et al. 2000) begleitet, die online unter glow.shinyapps.io/dice/ abrufbar ist. Diese interaktive Anwendung ermöglicht es, Werfen von verschiedensten Würfeln zu simulieren; sie illustriert viele der in diesem Beitrag besprochenen Analysen dynamisch. [Die Software ist ohne Programmierkenntnisse einsetzbar.] Dieser Aufsatz enthält einen R-Code, mit dem man mit beliebigen Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Augenzahlen virtuell würfeln kann. Ebenso wird R-Code für alle Berechnungen bereitgestellt. Außerdem gibt es begleitendes Lernmaterial mit ein paar fortgeschrittenen Themen und Illustrationen für die interessierten Leser.

In Abschnitt 2 erklären wir, wie man in R Würfeln mit beliebigen Wahrscheinlichkeiten simuliert und führen in die motivierende Eingangsfrage ein. In Abschnitt 3 beschreiben wir, wie man das Bayes-Theorem zur Lösung dieser Frage nützt. In Abschnitt 4 modifizieren wir die Eingangsfrage und untersuchen, wie sich diese Modifikation auf die Inferenz im Bayes-Ansatz auswirkt. In Abschnitt 5 formulieren wir die Eingangsfrage neu mit Münzen anstelle von Würfeln (zwei statt sechs mögliche Ergebnisse). In Abschnitt 6 vergleichen und kontrastieren wir den Bayesianischen Ansatz mit dem nicht-Bayesianischen Goodness-of-Fit-Test. In Abschnitt 7 beschreiben wir eine interaktive Shiny-Anwendung und in Abschnitt 8 beenden wir unsere Ausführungen mit abschließenden Bemerkungen.

2 Virtuelles Würfeln (mittels R)

Wir beginnen mit einem probabilistischen Modell fürs Würfeln. Ein sechsflächiger Würfel – egal ob regulär oder nicht – mit Markierungen von eins bis sechs zeigt eine dieser Zahlen obenauf, wobei die Wahrscheinlichkeiten von p_1 bis p_6 die Bedingung $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ erfüllen müssen. Bei einem regulären („fairen“) Würfel ist jede dieser Wahrscheinlichkeiten $1/6$, bei einem verzerrten Würfel oder einem „Trickwürfel“ können sich diese Wahrscheinlichkeiten aber wesentlich von $1/6$ unterscheiden. Hier nehmen wir an, dass die Würfe unabhängig sind und dass die Wahrscheinlichkeiten p_i bis p_6 bei jedem Wurf gleichbleiben.

Daher können wir n Würfe eines gegebenen Würfels kurz durch ein 6-Tupel $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ darstellen, wobei n_i dafür steht, wie oft die Zahl i vorkam (also $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$). Wenn $p_i > 0$ für jedes i ist, lautet eine natürliche Frage:

„Wie viele verschiedene 6-Tupel sind nach n Würfelwürfen möglich?“

Diese Frage kann leicht mit der „Sterne und Balken“-Zähltechnik beantwortet werden. Angenommen, wir stellen n Sterne in eine Reihe und verwenden 5 Balken, um sie zu trennen. Die 5 Balken unterteilen die Sterne in 6 Felder und die Anzahl der Sterne in jedem Fach entspricht dem jeweiligen n_i . Daher ist es äquivalent, die Anzahl der Möglichkeiten zu zählen, wie man fünf Balken unter $n + 5$ Plätzen (in einer Reihe angeordnet) platzieren kann; es gibt insgesamt $\binom{n+5}{5}$ 6-Tupel; das sind $\binom{15}{5} = 3003$ Ergebnisse bei $n = 10$ Würfeln.

Einige dieser 6-Tupel werden wahrscheinlicher sein als andere, abhängig von den Wahrscheinlichkeiten p_i . Beim 10-maligen Würfeln mit einem regulären Würfel etwa würden wir ein gleichmäßig verteiltes Tupel wie $(2,2,2,2,1,1)$ viel eher erwarten als ein „schiefes“ wie $(6,1,1,1,1,0)$. Das erstere Tupel ist sogar 45-mal wahrscheinlicher als das letztere. Diese Berechnung wird im Abschnitt zur Multinomialverteilung näher besprochen.

Als Nächstes betrachten wir verzerrte Würfel wie gewichtsbelastete Würfel oder eine andere Form von Trickwürfeln, bei denen die Wahrscheinlichkeiten nicht mehr gleich sind. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, wie man einen Trickwürfel konstruieren kann, aber eine gängige Technik besteht darin, die Masse im Inneren des Würfels durch heimliches Einfügen eines Metallgewichts ungleichmäßig zu verteilen. Das Online-Unternehmen trick-dice.com

stellt alle Arten von trickreichen Würfeln her und verkauft sie, darunter seiten-, kanten- und eckengewichtete Würfel aus Blei oder Eisen. Das Unternehmen bietet eine YouTube-Demonstration seines „dreifach verzerrten Würfels“, der nach 113 Würfeln folgende ungefähre Wahrscheinlichkeiten anzeigte:

Dreifach verzerrter Würfel:

$p_1 = 0,08, p_2 = 0,08, p_3 = 0,64, p_4 = 0,01, p_5 = 0,06, p_6 = 0,13$

Dieser Würfel hat eine hohe Wahrscheinlichkeit, eine Drei, und eine sehr geringe, eine Vier zu würfeln (die Zahl gegenüber von drei). Obwohl es Spaß machen kann im Klassenzimmer zu würfeln, ist es nicht notwendig, Geld auszugeben, um Daten aus solchen Würfeln erzeugen. Mit der R-Funktion `rmultinom` lassen sich leicht Würfel mit benutzerdefinierten Wahrscheinlichkeiten nachahmen. Abbildung 1 mit dem Code Block 1 zeigt, wie einfach es ist, in R 100 Würfe mit dem dreifach verzerrten Würfel zu simulieren.

```
1 > rmultinom(n=1,size=100,prob=c(.08,0.08,.64,.01,.06,.13))
```

Abb. 1: Code Block 1: Simulieren eines verzerrten Würfels.

Mit den Parametern `n=1` und `size=100` werden die 100 Würfe automatisch in sechs Gruppen klassifiziert; die Angabe von `n=100` und `size=1` zeigt die einzelnen Ergebnisse bei 100 Würfeln.

Da wir Würfe mit verzerrten Würfeln leicht erzeugen können, stellen wir diese motivierende Frage:

Zwei Würfel werden in einen Sack gelegt – ein regulärer (fairer) Würfel und der andere ist der „dreifach verzerrte Würfel“. Ein Würfel wird zufällig aus dem Beutel ausgewählt und mehrmals geworfen.

Basierend auf den Ergebnissen, was meinst du, mit welchem Würfel wurde gewürfelt?

Für diese Frage wissen wir, dass einer der beiden Würfel zufällig ausgewählt wird; also, bevor wir die Daten sammeln, wissen wir, dass wir eine Chance von 0,5 haben, mit dem regulären Würfel zu werfen. Wir würfeln nun mit dem ausgewählten Würfel und verwenden die Information in den Daten, um diese Wahrscheinlichkeit zu „aktualisieren“. Die 0,5 wird als a priori-Wahrscheinlichkeit für den regulären Würfel bezeichnet. Die „aktualisierten“ Wahrscheinlichkeiten, welche die Information aus den Daten nutzen, werden als a posteriori-Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Wir fahren fort, um diese Frage zu beantworten, indem wir die Wahrscheinlichkeiten a posteriori für jeden Würfel auf der Grundlage der Daten und der a priori-Wahrscheinlichkeiten neu berechnen. Die Vorgangsweise wird als „Bayes-Ansatz“ bezeichnet.

3 Der Bayesianische Ansatz

Herzstück des Bayesianischen Ansatzes ist das Bayes-Theorem. Bevor wir würfeln, wissen wir, dass die a priori-Wahrscheinlichkeit, mit dem regulären Würfel zu würfeln, 50 % beträgt; auch für den „dreifach verzerrten Würfel“ beträgt die Wahrscheinlichkeit 50 %. Wir verwenden das Bayes-Theorem, um diese a priori-Wahrscheinlichkeiten entsprechend den beobachteten Daten zu aktualisieren. In der Bayesianischen Terminologie nennen wir die aktualisierten a priori-Wahrscheinlichkeiten a posteriori-Wahrscheinlichkeiten.

Dieser Aktualisierungsprozess wird in Abbildung 2 heuristisch dargestellt. Die a posteriori-Wahrscheinlichkeiten (rechte Seite) werden mit Hilfe des Bayes-Theorems berechnet. Wir gehen auf diese Berechnungen für unser Würfelproblem weiter unten genauer ein.

$$P(\text{regulärer Würfel} \mid \text{Daten}) \quad (1) \\ = \frac{P(\text{regulärer Würfel}) \times P(\text{Daten} \mid \text{regulärer Würfel})}{P(\text{Daten})}$$

$$P(\text{3fach verzerrter Würfel} \mid \text{Daten}) \quad (2) \\ = \frac{P(\text{3fach verzerrter Würfel}) \times P(\text{Daten} \mid \text{3fach verzerrter Würfel})}{P(\text{Daten})}$$



Abb. 2: Heuristische Darstellung der Bayesianischen Aktualisierung

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten a posteriori in (1) und (2) hat drei Komponenten:

A priori-Wahrscheinlichkeiten

Die Terme $P(\text{regulärer Würfel})$ und $P(\text{„dreifach verzerrter Würfel“})$ sind die a priori-Wahrscheinlichkeiten; in unserem Problem sind beide gleich 0,5.

Likelihood-Wahrscheinlichkeiten

Die Terme $P(\text{Daten} \mid \text{„dreifach verzerrter Würfel“})$ und $P(\text{Daten} \mid \text{regulärer Würfel})$ werden als Likelihood-Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Sie repräsentieren die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Daten, wenn wir den genauen Würfel kennen, mit dem gewürfelt wurde.

Randwahrscheinlichkeit

Die Randwahrscheinlichkeit ist $P(\text{Daten})$; wir zeigen im Folgenden, wie diese Größe mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet wird.

Um die Likelihood-Wahrscheinlichkeiten für dieses Problem zu berechnen – die Wahrscheinlichkeit der Beobachtung eines Ergebnisses für einen bestimmten Würfel mit bekannten Wahrscheinlichkeiten – führen wir zunächst die Multinomialverteilung ein.

Multinomialverteilung

Die Multinomialverteilung modelliert die Wahrscheinlichkeit eines 6-Tupels (tabellarische Zusammenfassung der Ergebnisse beim mehrfachen Wurf eines sechsflächigen Würfels) unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeiten p_i für das Auftreten einzelner Seiten. Die exakte Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ ist

$$P((n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \mid (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)) \quad (3) \\ = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6)!}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4} p_5^{n_5} p_6^{n_6}$$

Bei einem regulären Würfel sind die Wahrscheinlichkeiten p_i alle gleich $1/6$. Daher vereinfacht sich (3) mit unserer Notation $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$ zu

$$P((n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \mid (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})) \quad (4) \\ = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!} \cdot \frac{1}{6^n}$$

In R wird eine Fakultät mit der Funktion `factorial` berechnet; `factorial(5)` liefert das Ergebnis 120. Anstatt explizit die Formel in (4) zu berechnen, können wir auch die in R eingebaute Funktion `dmultinom` verwenden, welche diese Berechnung durchführt. In Abbildung 3 berechnen wir in R die Wahrscheinlichkeit der Beobachtung (2,2,2,1,1) nach 10 Würfeln mit einem regulären Würfel auf zwei Arten: (a) direkte Berechnung von Gleichung (4) und (b) mit `dmultinom`. Zum Schluss berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, (6,1,1,1,1,0) zu würfeln, und zeigen, dass das Verhältnis dieser beiden Wahrscheinlichkeiten 45:1 ist.

```
1 > factorial(10)/(factorial(2)^4)*(1/6)^10
2 [1] 0.003750857
3 > dmultinom(x=c(2,2,2,1,1),prob=c(1/6,1/6,1/6, 1/6,1/6,1/6))
4 [1] 0.003750857
5 > dmultinom(x=c(6,1,1,1,1,0),prob=c(1/6,1/6,1/6, 1/6,1/6,1/6))
6 8.335239e-05
7 > dmultinom(x=c(2,2,2,1,1),prob=c(1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6))/
8   dmultinom(x=c(6,1,1,1,1,0),prob=c(1/6,1/6,1/6, 1/6,1/6,1/6))
9 [1] 45
```

Abb. 3: Code Block 2: Berechnung der multinomialen Wahrscheinlichkeiten.

Zurück zu unserem motivierenden Beispiel, Block 3 berechnet die Wahrscheinlichkeiten für die Beobachtung (4,2,9,1,3,6) separat unter der Annahme, dass wir den regulären bzw. den dreifach verzerrten Würfel geworfen haben (Abb. 4).

```
1 > Data=c(4,2,9,1,3,6)
2 > dmultinom(Data,prob=c(1/6,1/6,1/6, 1/6,1/6,1/6))
3 [1] 0.000007250641
4 > dmultinom(Data, prob=c(.08,0.08,.64,.01,.06,.13))
5 [1] 0.00001014919
```

Abb. 4: Code Block 3: Berechnung der Likelihood-Wahrscheinlichkeiten für (4,2,9,1,3,6).

Randwahrscheinlichkeit

Die letzte Berechnung für den Bayesianischen Ansatz ist die Randwahrscheinlichkeit (auch marginale Wahrscheinlichkeit): $P(\text{Daten})$. Um diesen Term zu berechnen, verwenden wir das *Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit*:

$$\begin{aligned} P(\text{Daten}) &= P(\text{Daten} \mid \text{regulärer Würfel}) \times P(\text{regulärer Würfel}) \\ &+ P(\text{Daten} \mid \text{3fach verzerrter Würfel}) \times P(\text{3fach verzerrter Würfel}) \end{aligned} \quad (5)$$

Das heißt, die Daten wurden entweder mit dem regulären oder dem dreifach verzerrten Würfel erzeugt, und wir berechnen diese jeweiligen Wahrscheinlichkeiten unter Verwendung der Multinomialverteilung, gewichtet mit den a priori-Wahrscheinlichkeiten. Wir stellen fest, dass diese Terme genau die jeweiligen Zähler auf der rechten Seite von (1) und (2) sind. Da wir nun die Likelihood-Wahrscheinlichkeiten leicht berechnen können, fahren wir fort mit der Berechnung der Randwahrscheinlichkeit (Code Block 4 in Abb. 5).

```
1 > Data=c(4,2,9,1,3,6)
2 > 0.5*dmultinom(Data,prob=c(1/6,1/6,1/6, 1/6,1/6,1/6))+
3 + 0.5*dmultinom(Data, prob=c(.08,0.08,.64,.01,.06,.13))
4 [1] 0.000008699914
```

Abb. 5: Code Block 4: Berechnung der Randwahrscheinlichkeit.

Alle Bauteile zusammensetzen

Schließlich können wir die a posteriori-Wahrscheinlichkeiten in (1) und (2) berechnen. Code Block 5 berechnet diese in R.

```
1 > Data=c(4,2,9,1,3,6)
2 > prob1=dmultinom(x=Data,prob=c(1/6,1/6,1/6, 1/6,1/6,1/6))
3 > prob2=dmultinom(x=Data,prob=c(.08,0.08,.64,.01,.06,.13))
4 > marginal=0.5*prob1+0.5*prob2
5 > 0.5*prob1/marginal
6 [1] 0.4167076
7 > 0.5*prob2/marginal
8 [1] 0.5832924
```

Abb. 6: Code Block 5: Berechnung der a posteriori-Wahrscheinlichkeiten.

Die a posteriori-Wahrscheinlichkeit für den regulären Würfel beträgt etwa 42 % und für den dreifach verzerrten Würfel 58 %. Die Ergebnisse des Bayes-Ansatzes sind in Abbildung 7 zusammengefasst. Hat man Daten beobachtet, bei denen die Anzahl von Dreien etwas überproportional ist, steigt die Wahrscheinlichkeit des dreifach verzerrten Würfels von 50 auf 58 %. Basierend auf den verfügbaren Daten sind wir weit davon entfernt, eine abgesicherte Aussage darüber treffen zu können, welcher Würfel geworfen wurde. Wir könnten es daher vorziehen, weiter zu würfeln, bis eine bestimmte a posteriori-Wahrscheinlichkeit, etwa 95 %, erreicht wird.

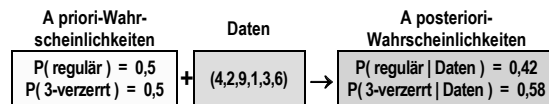


Abb. 7: Zusammenfassung der Ergebnisse des Bayesianischen Ansatzes.

4 Der mysteriöse Würfel

Im vorigen Beispiel haben wir das Bayes-Theorem verwendet, um die Wahrscheinlichkeit, dass einer von zwei bestimmten Würfeln mit bekannten Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen gewählt wurde. Was aber, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten eines der beiden Würfel gar nicht kennen? Wir betrachten folgende motivierende Frage.

Angenommen, wir legen zwei Würfel in einen Beutel – einen regulären und einen nicht-regulären Würfel – und wählen zufällig einen aus und beginnen, ihn zu werfen. Nachdem wir die gewürfelten Daten gesehen haben, was können wir darüber sagen, welcher Würfel ausgewählt wurde?

Um die a posteriori-Wahrscheinlichkeiten in (1) und (2) zu berechnen, müssen wir einige Annahmen über den mysteriösen Würfel treffen. Zum Beispiel können wir annehmen, dass der mysteriöse Würfel zu einer vorgegebenen Menge von Würfeln gehört, und wir können für jeden Würfel in dieser Menge eine Verteilung angeben. Eine solche Menge könnte zu groß sein, um einen umfassenderen Ansatz zu ermöglichen. Eine Methode dafür, eine Menge möglicher Würfel festzulegen, führt uns zurück zu der Sterne-und-Balken-Methode.

Wir wissen, dass es $\binom{k+5}{5}$ Möglichkeiten gibt, k

Sterne in sechs Behälter zu platzieren; wir können diese Platzierungen verwenden, um eine breite Palette von a priori-Verteilungen zu konstruieren. Wir tun dies, indem wir jede Platzierung, z. B. k_1 Sterne in Behälter 1, k_2 Sterne in 2, usw., mit einem Würfel mit den Wahrscheinlichkeiten k_1/k , k_2/k usw. identifizieren. Zum Beispiel kann bei $k = 10$ die Zusammensetzung $3 + 4 + 1 + 0 + 2 + 0$ dem Würfel mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,1$, $p_4 = 0,0$, $p_5 = 0,2$ und $p_6 = 0,0$ entsprechen. Wir würden dann die a priori-Wahrscheinlichkeit von 0,5 für

den mysteriösen Würfel gleichmäßig auf alle $\binom{k+5}{5}$ möglichen Würfel aufteilen.

Ein anderer Ansatz besteht darin, die möglichen Trickwürfel zu betrachten, die physikalisch konstruiert werden könnten. Zum Beispiel, wenn ein Würfel so verzerrt wird, dass er eher eine Drei würfelt, indem

man ein Gewicht auf der gegenüberliegenden Seite (der Seite, die eine Vier zeigt) anbringt, dann wird es viel unwahrscheinlicher, eine Vier zu würfeln. Andere Gewichtungen wie z. B. Kantengewichtung und Eckengewichtung könnten ebenfalls berücksichtigt werden, wenn man die Menge der Kandidatenwürfel mit den zugehörigen a priori-Verteilungen bestimmt. Eine angemessene Menge von solchen Verteilungen zu konstruieren kann erheblichen Aufwand erfordern.

Aber was passiert, wenn keiner der Würfel, die wir im Bayesianischen Ansatz verwenden, richtig ist? Nehmen wir zum Beispiel an, dass der Würfel, der geworfen wurde, die Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 0,4$, $p_4 = 0,1$, $p_5 = 0,1$, $p_6 = 0,2$ hat, wir aber nur den regulären und den dreifach verzerrten Würfel als Möglichkeiten betrachten. Wenn wir den Würfel sehr oft werfen, für welchen Würfel, wenn überhaupt, würde sich die Bayesianische Aktualisierung letztendlich entscheiden? Es stellt sich heraus, dass der Bayes-Ansatz jenen Würfel auswählt, der dem wahren Würfel am nächsten kommt. Auswählen bedeutet hierbei, dass die a posteriori-Wahrscheinlichkeit für diesen Würfel gegen eins konvergiert. Der Begriff „nächstgelegener“ ist schwer zu definieren; weitere Informationen für Wissbegierige sind in den ergänzenden Materialien zu finden.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer breiteren Diskussion über die Anwendung Bayesianischer Methoden in der Praxis. Im Kern geht der Bayes-Ansatz von einem Vorwissen aus (wie z. B. die Wahrscheinlichkeit, den regulären Würfel zu ziehen) und aktualisiert dieses Wissen nach Beobachtung einiger Daten. Wir nennen unser aktualisiertes Wissen a posteriori-Wahrscheinlichkeiten. Später, wenn weitere Daten auftauchen, können wir die „alten“ a posteriori-Wahrscheinlichkeiten als Vorwissen verwenden und dann „neue“ a posteriori-Wahrscheinlichkeiten berechnen. Dieser Prozess ahmt nach, wie wir lernen: Am Anfang, sind wir mit einem bestimmten Thema wenig vertraut (Vorwissen), aber nachdem wir mehr über das Thema gelernt haben (Daten), ist unser neues Verständnis des Themas (a posteriori-Wissen) eine Verschmelzung aus unserem Vorwissen und den Daten.

In der Medizin, könnten wir zum Beispiel wissen, wie gut ein bestimmter Impfstoff in einem Land funktioniert, aber wir sind vor allem daran interessiert, wie gut er in unserem eigenen Land wirkt, wo nur begrenzte Daten verfügbar sind. Eine Bayes-Analyse könnte uns helfen, die Daten des anderen Landes als a priori-Wissen aufzufassen und dieses mit den begrenzten Daten aus unserem Land zu verbinden, um die Wirksamkeit des Impfstoffs in unserem eigenen Land zu beurteilen.

5 Verzerrte Münzen

Für Münzen gibt es ein einfacheres Bayes-Modell als für den Würfel, da Münzen nur zwei Ergebnisse haben (Kopf oder Zahl) im Gegensatz zu den sechs Flächen eines Würfels. Hier bieten wir eine kurze Darstellung des Bayesianischen Münzmodells, beginnend mit der folgenden motivierenden Frage.

Zwei Münzen werden in einen Beutel gelegt – eine ist eine reguläre (faire) Münze und die andere ist eine „verzerrte Münze“. Eine Münze wird zufällig aus dem Beutel ausgewählt und mehrmals geworfen.

Ausgehend von Wurfergebnissen, was können wir darüber sagen, welche Münze geworfen wurde?

Dieses Münzproblem ähnelt dem Problem mit dem mysteriösen Würfel, da uns die Wahrscheinlichkeit von Kopf für die verzerrte Münze nicht ausdrücklich mitgeteilt wurde. Wäre diese bekannt, würden wir ähnlich vorgehen wie beim dreifach verzerrten Würfel. Allerdings, wie beim mysteriösen Würfel beschrieben, müssen wir einige zusätzliche Annahmen über die verzerrte Münze treffen, um mit einer Bayes-Analyse fortzufahren und a posteriori-Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Glücklicherweise ist in diesem Fall die Modellierung einer generischen verzerrten Münze recht einfach, da wir nur für *einen* Parameter eine Verteilung angeben müssen: die Wahrscheinlichkeit von Kopf, die wir θ nennen. Die Berechnung der a posteriori-Wahrscheinlichkeiten beginnt wie in (1) und (2):

$$\begin{aligned} P(\text{faire Münze} \mid \text{Daten}) \\ = \frac{P(\text{faire Münze}) \times P(\text{Daten} \mid \text{faire Münze})}{P(\text{Daten})} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P(\text{verzerrte Münze} \mid \text{Daten}) \\ = \frac{P(\text{verzerrte Münze}) \times P(\text{Daten} \mid \text{verzerrte Münze})}{P(\text{Daten})} \end{aligned} \quad (7)$$

Gelingt es, den Term $P(\text{Daten} \mid \text{verzerrte Münze})$ zu berechnen, können wir die a posteriori-Wahrscheinlichkeiten in (6) und (7) ermitteln. Nehmen wir nun an, dass eine Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von θ für Kopf n -mal geworfen wird. Dann folgt die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung von x Köpfen einer Binomialverteilung (x eine ganze Zahl zwischen 0 und n):

$$P(\underbrace{x \text{ Köpfe in } n \text{ Würfeln}}_{\text{Daten}} \mid \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \quad (8)$$

So lassen sich die Likelihood-Wahrscheinlichkeiten – $P(\text{Daten} \mid \theta)$ – berechnen, vorausgesetzt, wir kennen θ . Bei einer regulären Münze wissen wir $\theta = 1/2$, aber für die verzerrte Münze in der Fragestellung ist der Wert von θ unbekannt.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer Reihe von Kandidatenwerten für θ für die verzerrte Münze. Zum Beispiel, wären die Werte

{0 %, 10 %, 20 %, 30 %, 40 %, 60 %, 70 %, 80 %, 90 %, 100 %}

sehr vernünftig, und da wir keine weiteren Informationen über die verzerrte Münze haben, ist es natürlich anzunehmen, dass jede dieser verzerrten Münzen gleich wahrscheinlich ist. Mit einer solchen Annahme sind wir in der Lage, $P(\text{Daten}|\text{verzerrte Münze})$ zu berechnen, indem wir das *Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit* verwenden, das in (5) beschrieben ist. Angenommen, die Kandidatenwerte von θ für die verzerrte Münze sind θ_i , $i = 1, \dots, m$, mit a priori-Wahrscheinlichkeiten $P(\theta_i)$ derart, dass $\sum_{i=1}^m P(\theta_i) = 1$. Dann gilt:

$$P(\text{Daten} | \text{verzerrte Münze}) = \sum_{i=1}^m P(\text{Daten} | \theta_i) \times P(\theta_i) \quad (9)$$

Für ein konkretes Beispiel nehmen wir an, wir werfen die Münze 20 Mal und erhalten dabei 18 Mal Kopf. Code Block 6 hilft uns bei der Berechnung von (6) und (7) für die Menge der oben angeführten möglichen Werte von θ , wir erhalten damit die a posteriori-Wahrscheinlichkeiten für das Münzproblem. Zur Berechnung der binomischen Wahrscheinlichkeiten in (8) verwenden wir `dbinom`.

```
1 > x=18;n=20
2 > prob.fair=dbinom(x=x,size=n,prob=0.5)
3 > prob.biased=sum(dbinom(x=x,size=n,prob=
  c(0.1,2.,3.,4.,5.,6.,7.,8.,9,1))*(.5/10))
4 > prob.data=prob.fair*0.5+prob.biased*0.5
5 > posterior.fair=(prob.fair*0.5)/prob.data
6 > posterior.biased=(prob.biased*0.5)/prob.data
7 >
8 > posterior.fair
9 [1] 0.007935952
10 > posterior.biased
11 [1] 0.992064
```

Abb. 8: Code Block 6: Berechnung der posteriori Wahrscheinlichkeiten im Münzproblem.

Wie zu erwarten, nachdem bei 20 Münzwürfen 18 Köpfe beobachtet wurden, ist die a posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass die reguläre Münze gewählt wurde, recht gering – etwa 0,8 %. Hätten wir 10 Köpfe bei 20 Würfeln beobachtet, würde die a posteriori-Wahrscheinlichkeit für die reguläre Münze 92,2 % betragen.

Da wir keine Informationen über die Art der verzerrten Münze haben, liegt es nahe, die Wahrscheinlichkeit θ von Kopf mit einer Gleichverteilung auf $[0; 1]$ zu modellieren. Gleichung (9) hat eine natürliche Erweiterung von einer Menge diskreter Parameter θ_i auf eine stetige Wahrscheinlichkeitsdichte für θ . Diese fortgeschrittene Berechnung wird im ergänzenden Lehrmaterial beschrieben.

6 Test der Anpassungsgüte im Problem des mysteriösen Würfels

Wir betrachten erneut das Problem mit dem mysteriösen Würfel, nun mit einem nicht-Bayesianischen Ansatz, sowohl in Bezug auf die Fragestellung als auch in der Art und Weise, wie die Evidenz in den Daten erfasst wird. Obwohl Wahrscheinlichkeiten schon seit Jahrhunderten betrachtet werden, wurden Konzepte und Methoden der statistischen Inferenz erst vor etwa 100 Jahren entwickelt. Der klassische statistische Hypothesentest, der damals erfunden wurde, war für Situationen wie das erste Beispiel gedacht, bei dem es um die Wahl zwischen lediglich zwei vollständig spezifizierten Würfeln geht. Aber solche Beispiele sind eher künstlich als real, und statistische Hypothesentests werden in komplexen realen Kontexten verwendet als Möglichkeit, Evidenz [Aussagekraft] von Daten zu interpretieren, oft in Verbindung mit anderen Methoden.

Für das Problem des mysteriösen Würfels betrachten wir nur die Frage, ob der Würfel regulär ist oder nicht, ohne jegliche Einschränkungen für den Würfel, wenn er nicht regulär ist, oder irgendwelche Wahrscheinlichkeitsannahmen (etwa, es ist gleich wahrscheinlich, dass er aus einer bestimmten Menge von Würfeln stammt). Die einfachste Situation ist, dass der Würfel regulär ist, sodass der Ansatz darin besteht, zu prüfen, wie stark die Daten gegen diese einfache Annahme sprechen. Der Bayes-Ansatz umfasst auch die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, *exakt die beobachteten Daten zu erhalten unter der Annahme bestimmter Würfel*, aber hier geht es darum, die Wahrscheinlichkeit, *die beobachteten Daten oder noch extremere Werte zu erhalten, wenn der Würfel regulär ist*.

Wir können dies für das Problem mit dem mysteriösen Würfel tun, indem wir einen sogenannten Goodness-of-Fit-Test durchführen, den Studierende oft im ersten Statistikkurs kennenlernen. Wir beginnen mit dem Aufstellen der beiden statistischen Hypothesen:

H_0 (*Nullhypothese*): der Würfel ist *regulär*, d. h., $p_i = 1/6$ ($i = 1, \dots, 6$).

H_1 (*Alternativhypothese*): der Würfel ist *nicht regulär*; d. h., $p_i \neq 1/6$ für einige i .

Die Chi-Quadrat-Statistik für die Anpassungsgüte wird wie folgt berechnet:

$$\sum \frac{(\text{beobachtet} - \text{erwartet})^2}{\text{erwartet}} = \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - n/6)^2}{n/6}$$

Diese Statistik wird dann mit einer Chi-Quadrat-Verteilung mit fünf Freiheitsgraden verglichen (die sechs

Werte von p_i , die variieren können, abzüglich der einen Einschränkung $\sum p_i = 1$, ergibt fünf), um den p -Wert für den statistischen Hypothesentest zu bestimmen. Der p -Wert ist die Chance, die beobachteten Daten zu erhalten oder noch extremeres (d. h., weiter entfernt von dem, was wir erwarten), *wenn der Würfel regulär ist*. Ein kleiner p -Wert ist also ein empirischer Beleg dafür, dass der Würfel nicht regulär ist. Ein nicht kleiner p -Wert bedeutet, dass es keine ausreichenden Belege gibt, um festzustellen, dass der Würfel nicht regulär ist.

Es ist wichtig zu beachten, dass der Test der Anpassungsgüte ein asymptotischer Test ist und dass sein angemessener Gebrauch von einer ausreichend großen Stichprobe (Anzahl der Würfe) abhängt, um sicherzustellen, dass die Teststatistik einigermaßen nahe der unterstellten Chi-Quadrat-Verteilung folgt. Es gibt keine feste Stichprobengröße, mit der garantiert werden kann, dass die Annahmen des Tests hinreichend erfüllt werden. Alternative Methoden für kleinere Stichprobengrößen sind im zusätzlichen Lehrmaterial angegeben.

Angenommen, wir haben den mysteriösen Würfel 25 Mal geworfen und das Ergebnis (4, 2, 9, 1, 3, 6) beobachtet. Wir verwenden R, um die die Goodness-of-Fit-Teststatistik und den entsprechenden p -Wert zu berechnen, um zu testen, ob diese Wurfserie mit einem regulären Würfel konsistent ist. Code Block 7 (Abb. 9) zeigt, wie man die Teststatistik und den entsprechenden p -Wert mit R berechnet.

```
1 > observed=c(4,2,9,1,3,6)
2 > expected=c(1/6,1/6,1/6, 1/6,1/6,1/6)*sum(observed)
3 > chisq.statistic=sum((observed-expected)^2/expected)
4 >chisq.statistic
5 [1] 10.28
6 >pchisq(q=chisq.statistic,df=5,lower=F) #goodness-of-fit p-
  value
7 [1] 0.06767935
```

Abb. 9: Code Block 7: Berechnung der Goodness-of-Fit und des p -Werts.

Die Chance lag also bei etwa 7 %, dieses Ergebnis zu erreichen oder ein weiter entferntes von der theoretisch erwarteten Häufigkeit von 25/6 für jede Augenzahl. Dies sagt uns, dass es nicht sehr ungewöhnlich wäre, unsere Daten nur durch Zufall zu erhalten, wenn der Würfel wirklich regulär ist. Bei einer Wahrscheinlichkeit von 7 % könnten wir uns dennoch fragen, ob der Würfel regulär ist. Wir könnten diesen p -Wert angeben und sagen, dass es einige, aber nicht sehr starke Hinweise darauf gibt, dass der Würfel nicht regulär ist, das ist die beste Art, das Ergebnis des Tests zu kommunizieren.

Der Goodness-of-Fit-Test scheint gut geeignet zu sein, um gegen eine generische Alternative zu testen,

wie sie etwa mit dem Problem des mysteriösen Würfels gegeben ist. Man beachte aber, dass er sich auf die folgende Frage bezieht.

„Gibt es genügend Beweise in den Daten, dass er nicht regulär ist?“ [Beweise im Sinne von Evidenz, Belegen, empirischen Beweisen, Indizien etc.]

Er sagt nichts darüber aus, was der Würfel sein könnte, wenn es starke Beweise [Belege] dafür gibt, dass der Würfel nicht regulär ist, und er berücksichtigt keine a priori-Informationen, die wir über die möglichen Würfel haben könnten. Im Gegensatz dazu kann der Bayes-Ansatz für das Problem des mysteriösen Würfels solche a priori-Informationen berücksichtigen, aber er muss a priori-Verteilungen festlegen und die Analyse hängt von diesen Vorannahmen ab. Er kämpft auch damit, dass man entweder die Möglichkeiten stark einschränken muss, wenn der Würfel nicht regulär ist, oder höhere mathematische Methoden und Computerleistung einbringen muss.

7 Shiny Anwendungen

Eine Shiny-Anwendung für den Würfelkontext zur Ergänzung dieses Artikels ist zugänglich unter glow.shinyapps.io/dice/ (Quellcode auf GitHub unter github.com/arthurberg/dice). Abbildung 10 zeigt einen Screenshot mit der interaktiven Anwendung, der in sechs Kästen unterteilt ist, um die Identifizierung in der Beschreibung zu erleichtern. Die linke Seite bezieht sich auf benutzerdefinierte Eingaben (1–3), während die rechte die Ergebnisse von Simulationen und Analysen zeigt (4–6).

Kasten 1: Auswahl des Würfels

In diesem Kasten wird festgelegt, welcher spezifische Würfel verwendet wird. Zu den Optionen gehören der reguläre Würfel, der dreifach verzerrte Würfel sowie die Möglichkeit, einen Würfel mit benutzerdefinierten Wahrscheinlichkeiten anzugeben. Mit der Option des benutzerdefinierten Würfels kann man die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt erkunden. Darüber hinaus gibt es drei Optionen für den mysteriösen Würfel. Bei jeder hat man 50 % Wahrscheinlichkeit, einen regulären Würfel zu wählen, und je nach mysteriösem Würfel, 50 % für einen dreifach verzerrten Würfel, einen nicht-spezifisierten Würfel mit „zufälligen“ Wahrscheinlichkeiten oder einen Würfel mit benutzerdefinierten Wahrscheinlichkeiten.

Kasten 2: Auswahl der priori-Verteilungen

Der Benutzer kann die die a priori-Verteilungen mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten auswählen. Zu

den Optionen gehören der reguläre Würfel, der dreifach verzerrte Würfel und ein Würfel mit benutzerdefinierten Wahrscheinlichkeiten. Es besteht auch die Möglichkeit, „Breit gefächerte Würfel“ auszuwählen, bei dem die vom Benutzer angegebene Wahrscheinlichkeit auf $\binom{15}{5} = 3003$ breit gefächerte a priori-

Verteilungen aufgeteilt wird. Diese a Prioris werden nach der im vorigen Abschnitt beschriebenen Methode gebildet. Die a priori-Wahrscheinlichkeiten sollten sich zu 1 addieren, aber wenn dies nicht der Fall ist, normalisiert die Anwendung diese automatisch, indem sie die Werte durch ihre Summe dividiert.

Kasten 3: Werfen des Würfels

Der Benutzer kann die Anzahl von Würfeln festlegen und dann dynamisch weitere Würfel hinzufügen (in Schritten von 1, 5 oder 20) und beobachten, wie sich die Ergebnisse mit den zusätzlichen Würfeln ändern. Die Schaltfläche „Würfel aufdecken“ wird in Kasten 6 erklärt. Die Schaltfläche „Zurücksetzen“ setzt die Würfel zurück, nicht aber die vom Benutzer festgelegten Parameter. So kann man leicht sehen, wie sich bei einem festen Satz von Parametern unterschiedli-

che Ergebnisse aus den verschiedenen Datensätzen ergeben.

Kasten 4: Ergebnisse I

Die einzelnen Würfe werden in diesem Kasten oben angezeigt, die tabellarischen Wurfresultate stehen in der Grafik links. Die Grafik rechts zeigt die vom Benutzer angegebenen a priori-Wahrscheinlichkeiten und die berechneten a posteriori-Wahrscheinlichkeiten. Diese Grafik wird aktualisiert, je nach den gewählten a priori-Verteilungen und deren Wahrscheinlichkeiten. Wenn als Prioris „Breit gefächerte Würfel“ gewählt wird, dann werden alle Würfel in dieser Menge zusammengefasst. Damit die Grafik übersichtlich wird, werden in der Tabelle nur Prioris mit einer a posteriori-Wahrscheinlichkeit von mindestens 5 % aufgeführt. Die Auflistung aller Prioris würde die Tabelle unhandlich machen; der Schwellenwert von 5 % ist ohne besondere Bedeutung.

Kasten 5: Ergebnisse II

Die Teststatistik für die Anpassungsgüte und der p -Wert der Nullhypothese, dass ein regulärer Wür-

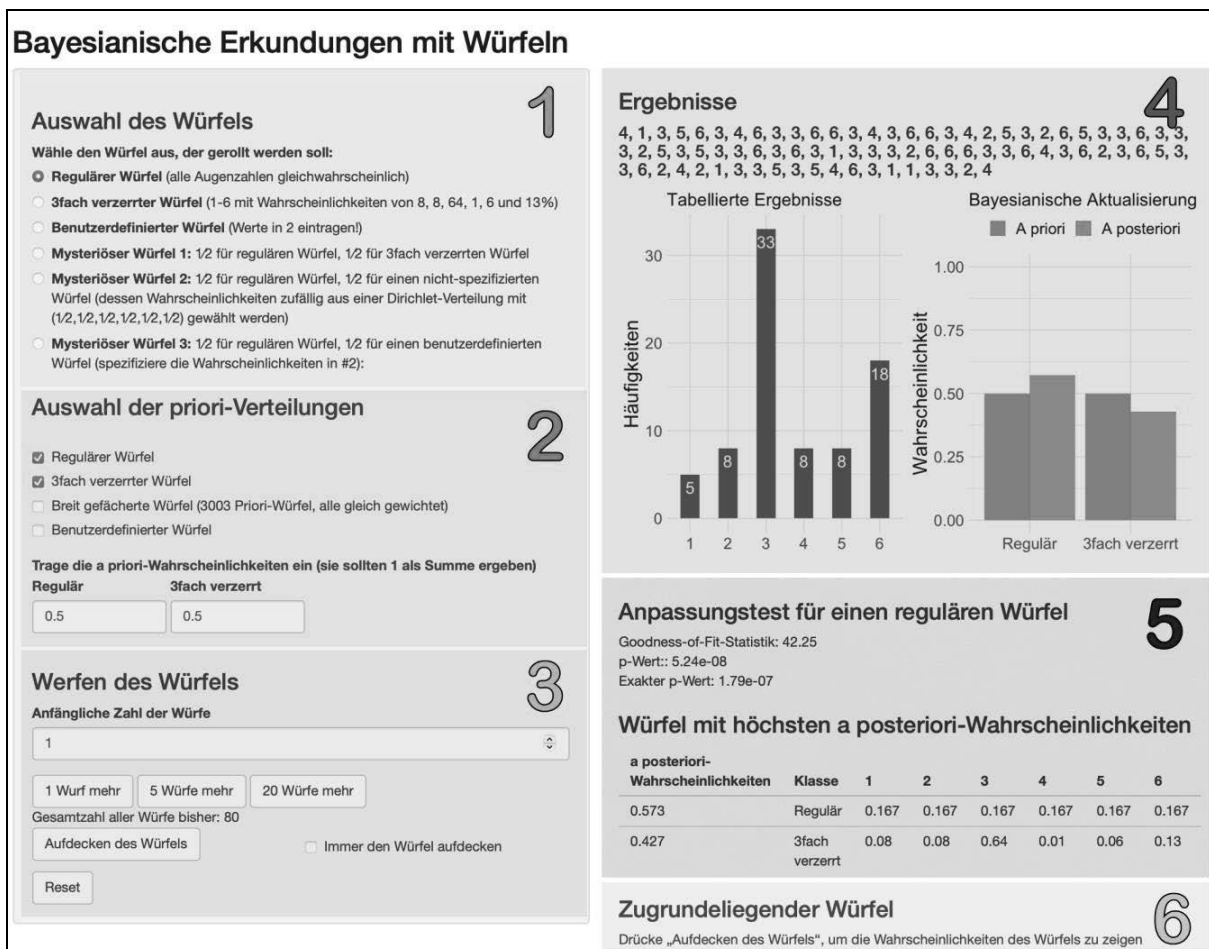


Abb. 10: Überblick über die Shiny-Anwendung, die unter glow.shinyapps.io/Wuerfel/ verfügbar ist.

fel benutzt wird, werden in diesem Kasten angezeigt. Darüber hinaus gibt es eine Liste der Würfel mit den höchsten a posteriori-Wahrscheinlichkeiten. Wenn „Breit gefächerte Würfel“ als Priori ausgewählt wird, werden in dieser Tabelle alle 3003 Priori-Würfel mit einer a posteriori-Wahrscheinlichkeit von mehr als 5 % aufgeführt.

Kasten 6: Aufdecken des mysteriösen Würfels

Wenn in der Simulation ein mysteriöser Würfel ausgewählt wird, zeigt dieser Kasten die Augenzahlen, die gewürfelt wurden. Standardmäßig ist der Würfel verborgen, es sei denn, die Schaltfläche „Würfel aufdecken“ wird gedrückt. Dies ermöglicht eine spannendere Präsentation in der Klasse, indem der wahre Würfel erst nach Betrachtung der Daten und verschiedener Analysen aufgedeckt wird.

8 Abschließende Bemerkungen

Würfeln bietet ein vereinfachtes probabilistisches Modell zur Unterstützung der Schlüsselkonzepte der diskreten Wahrscheinlichkeit und Statistik. Wir verwenden das Würfelwurf-Modell zum besseren Verständnis der Aktualisierung der a priori-Wahrscheinlichkeit, die als ein Sprungbrett zu anspruchsvolleren Themen der Bayesianischen Statistik angesehen werden kann. Außerdem haben wir den Bayes-Ansatz dem Goodness-of-Fit-Test gegenübergestellt und Unterschiede herausgearbeitet in den Problemen, die betrachtet werden können, in den Annahmen, die für den Ansatz erforderlich sind, und, wie die Information aus den Daten jeweils dargestellt werden kann. Man beachte, dass dieser Artikel nicht auf weitere Aspekte sowohl des Bayesianischen als auch des nicht-Bayesianischen Ansatzes eingeht, wie z. B. der Vergleich von Glaubwürdigkeits- und Schätzintervallen.

Würfeln im Klassenzimmer mit realen Würfeln oder mittels des Shiny-Programms kann eine wirksame Aktivität im Unterricht sein, um das Interesse und die Neugier der Lernenden zu wecken. Zum Nachdenken anregende Kommentare im gesamten Artikel sollen Leserschaft und Lernende ermutigen, über die vielfältigen Ansätze im Kontext der vorgestellten Themen nachzudenken. Die begleitende Shiny-Anwendung bietet grenzenlose Möglichkeiten für weitere Erkundungen, um die behandelten Themen noch besser zu verstehen und zu vertiefen.

Literatur

Arnholt, A. T. (2019): Using a shiny app to teach the concept of power. In: *Teaching Statistics* 41(3), S. 79–84.

Chang, W.; Cheng, J.; Allaire, J.; Xie, Y.; McPherson, J. (2020): shiny: Web application framework for R. R version 1.5.0. CRAN.R-project.org/package=shiny.

Dunn, P. K. (2005): We can still learn about probability by rolling dice and tossing coins. In: *Teaching Statistics* 27(2), S. 37–41.

Feldman, L.; Morgan, F. (2003): The pedagogy and probability of the dice game hog. In: *Journal of Statistics Education* 11(2), S. 1–8.

Foster, C.; Martin, D. (2016): Two-dice horse race. In: *Teaching Statistics* 38(3), S. 98–101.

Gelman, A.; Glickman, M. E. (2000): Some class-participation demonstrations for introductory probability and statistics. In: *Journal of Educational and Behavioral Statistics* 25(1), S. 84–100.

Gelman, A.; Nolan, D. (2002): You can load a die, but you can't bias a coin. In: *American Statistician* 56(4), S. 308–311.

Jessop, A. (2010): Bayes ice-breaker. In: *Teaching Statistics* 32(1), S. 13–16.

McPherson, S. H. (2015): Unders and overs: Using a dice game to illustrate basic probability concepts. In: *Teaching Statistics* 37(1), S. 18–22.

Meyer, J. (2019): A formula for a two-dice horse race. In: *Teaching Statistics* 41(1), S. 14–17.

Freire, S. M. (2019): Using Shiny to illustrate the probability density function concept. In: *Teaching Statistics* 41(1), S. 30–35.

Stephenson, P.; Richardson, M.; Gabrosek, J.; Reischman, D. (2009): How LO can you GO? Using the dice-based golf game GOLO to illustrate inferences on proportions and discrete probability distributions. In: *Journal of Statistics Education* 17(2), S. 1–37.

Wang, A.-L. (1989): The game of Tai Sai. In: *Teaching Statistics* 11(1), S. 2–3.

Wang, A.-L. (1993): The game of Luk Kow. In: *Teaching Statistics* 15(1) (1993), S. 6–7.

Williams, I. J.; Williams, K. K. (2018): Using an R Shiny to enhance the learning experience of confidence intervals. In: *Teaching Statistics* 40(1), S. 24–28.

Zusätzliches Lehrmaterial

Supporting Information: test12271-sup-0001-Supinfo.pdf

Wiley (*Teaching Statistics*) hat dem Autor die Publikation einer deutschen Fassung in *Stochastik in der Schule* genehmigt.

Anschrift des Verfassers

Arthur Berg
Division of Biostatistics & Bioinformatics
Penn State University, Hershey, PA, USA.
berg@psu.edu